Facultad de Informática
Grado en Ingeniería Informática

Lógica

PARTE 4: RESOLUCIÓN

Tema 15: Estrategias de Resolución

Profesor: Javier Bajo
jbajo@fi.upm.es

Introducción.

Componentes

Parte 1
Lógica Proposicional

Parte 2
Lógica de Primer Orden

Parte 3
Demostración Automática

Parte 4
Resolución

Estrategias.

- La aplicación de la regla de resolución en los sistemas de demostración automática de teoremas tiene variantes.

- La aplicación del procedimiento de saturación, sin limitaciones, genera normalmente muchas cláusulas irrelevantes y redundantes.

- Es necesario aplicar criterios selectivos de forma sistemática que simplifiquen el proceso y lo hagan computacionalmente eficiente.

- Se usarán dos tipos de criterios:
  - **Estrategias de simplificación**: con el objetivo de **reducir el número de cláusulas** en el conjunto
  - **Estrategias de refinamiento**: con el objetivo de **limitar la generación de cláusulas**

Estrategias de simplificación.

1)Eliminación de cláusulas idénticas

Es posible deducir por resolución □ a partir de un conjunto de cláusulas C sii es posible deducir por resolución □ a partir de C tras eliminar cláusulas idénticas (obvio)

Conclusión: si se genera una cláusula que ya está en la demostración, no se incluye nuevamente

2)Eliminación de cláusulas con literales puros

Un literal L de un conjunto de cláusulas es puro si y sólo si no existe ningún otro literal complementario ¬L' en el conjunto tal que L y L' son unificables

Es posible deducir por resolución □ a partir de un conjunto de cláusulas C sii es posible deducir por resolución □ a partir de C tras eliminar las cláusulas con literales puros

Una cláusula con un literal puro es inútil de cara a la refutación porque el literal nunca podrá eliminarse en el proceso de resolución

Conclusión: esta estrategia sólo es necesario aplicarla una vez, puesto que de un conjunto de cláusulas sin literales puros no pueden generarse cláusulas con literales puros

Estrategias de simplificación.

C:

1)	$P \vee Q$	
2)	$\neg P \vee Q$	
3)	$P \vee \neg Q$	
4)	$\neg P \vee \neg Q$	
5)	Q	de 1) y 2)
6)	P	de 1) y 3)
7)	$Q \vee \neg Q$	de 1) y 4)
8)	$P \vee \neg P$	de 1) y 4)
9)	$Q \vee \neg Q$	de 2) y 3)
10)	$P \vee \neg P$	de 2) y 3)
11)	$\neg P$	de 2) y 4)
12)	$\neg Q$	de 3) y 4)
13)	$P \vee Q$	de 1) y 7)
14)	$P \vee Q$	de 1) y 8)
15)	$P \vee Q$	de 1) y 9)
16)	$P \vee Q$	de 1) y 10)
17)	Q	de 1) y 11)
18)	P	de 1) y 12)
19)	Q	de 2) y 6)
20)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 7)
21)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 8)
22)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 9)
23)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 10)
24)	$\neg P$	de 2) y 12)
25)	P	de 3) y 5)
26)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 7)
27)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 8)
28)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 9)
29)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 10)
30)	$\neg Q$	de 3) y 11)
31)	$\neg P$	de 4) y 5)
32)	$\neg Q$	de 4) y 6)
33)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 7)
34)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 8)
35)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 9)
36)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 10)
37)	Q	de 5) y 7)
38)	Q	de 5) y 9)
39)	$\square$	de 5) y 12)

Si se aplica la estrategia de eliminación de cláusulas idénticas, la refutación anterior queda:

1)	$P \vee Q$	
2)	$\neg P \vee Q$	
3)	$P \vee \neg Q$	
4)	$\neg P \vee \neg Q$	
5)	Q	de 1) y 2)
6)	P	de 1) y 3)
7)	$Q \vee \neg Q$	de 1) y 4)
8)	$P \vee \neg P$	de 1) y 4)
9)	$\neg P$	de 2) y 4)
10)	$\neg Q$	de 3) y 4)
11)	$\square$	de 5) y 10)

Estrategias de simplificación.

3)Eliminación de cláusulas tautológicas

Es posible deducir por resolución □ a partir de un conjunto de cláusulas C sii es posible deducir por resolución □ a partir de C tras eliminar las cláusulas tautológicas

Una cláusula tautológica es verdad para cualquier interpretación, por lo que si la borramos de un conjunto de cláusulas insatisfacible, el conjunto seguirá siendo insatisfacible.

Nota: $p(x) \vee \neg p(x) \vee q(y)$ es una cláusula tautológica, pero $p(x) \vee \neg p(y) \vee q(y)$ no

1)	$P \vee Q$	
2)	$\neg P \vee Q$	
3)	$P \vee \neg Q$	
4)	$\neg P \vee \neg Q$	
5)	Q	de 1) y 2)
6)	P	de 1) y 3)
7)	$Q \vee \neg Q$	de 1) y 4)
8)	$P \vee \neg P$	de 1) y 4)
9)	$\neg P$	de 2) y 4)
10)	$\neg Q$	de 3) y 4)
11)	□	de 5) y 10)

Si se eliminan las tautologías, la refutación anterior queda:

1)	$P \vee Q$	
2)	$\neg P \vee Q$	
3)	$P \vee \neg Q$	
4)	$\neg P \vee \neg Q$	
5)	Q	de 1) y 2)
6)	P	de 1) y 3)
7)	$\neg P$	de 2) y 4)
8)	$\neg Q$	de 3) y 4)
9)	□	de 5) y 8)

Refutaciones y Estrategias de refinamiento.

- **Derivación** de una cláusula C a partir de un conjunto de cláusulas $\{C_1,...,C_n\}$ es una secuencia $<C_1,...,C_n,R_1,...,R_m>$ tal que:
  - Cada R_i es el resolvente de dos cláusulas anteriores de la secuencia
  - No se realiza el mismo paso de resolución (entre las mismas cláusulas con los mismos factores) más de una vez
  - $R_m = C$

- **Refutación:** derivación de □ a partir de $\{C_1,...,C_n\}$

- La regla de resolución con umg es correcta ➔ una derivación es una deducción correcta
- El método de resolución es completo ➔ si $\{C_1,...,C_n\}$ es insatisfacible, hay una derivación de □ mediante resolución
- El método general de demostración de insatisfacibilidad se puede poner en términos de la búsqueda de una refutación: se consideran todas las posibles derivaciones del conjunto de cláusulas hasta encontrar una que sea una refutación.
- Las estrategias de refinamiento sirven para reducir el espacio de búsqueda de refutaciones

Resolución Lineal.

- **Derivación lineal**: Una derivación lineal de C_m a partir de $\{C_1,\ldots,C_n\}$ es una secuencia $C_1,\ldots,C_n,C_{n+1},\ldots,C_m$ tal que
  C_{n+1} es el resolvente de dos cláusulas $\in \{C_1,\ldots,C_n\}$ (*cláusulas de cabecera*)
  y
  Para todo $i > n+1$, C_i es el resolvente de C_{i-1} con otra cláusula C_j, $j < i$

- **Resolución lineal**: Sólo genera derivaciones lineales

- **La resolución lineal es completa**: Un conjunto de cláusulas C es insatisfacible sii existe una refutación lineal de C
  - Podemos restringir las derivaciones posibles a derivaciones lineales

- Además, no es necesario probar con todas las cláusulas del conjunto inicial como punto de partida de la refutación lineal:

  - Se puede demostrar que si un conjunto de cláusulas S es satisfacible y $S \cup \{C\}$ (C es una cláusula) es insatisfacible, entonces hay un refutación lineal que empieza con C.

Resolución Input.

- **Derivación input**: Una derivación input de C_m a partir de $\{C_1,\ldots,C_n\}$ es una secuencia $C_1,\ldots,C_n,C_{n+1},\ldots,C_m$ tal que :
  - Para todo $i > n$, C_i es resolvente de una cláusula $C_k \in \{C_1,\ldots,C_n\}$ y otra cláusula C_j, $j < i$

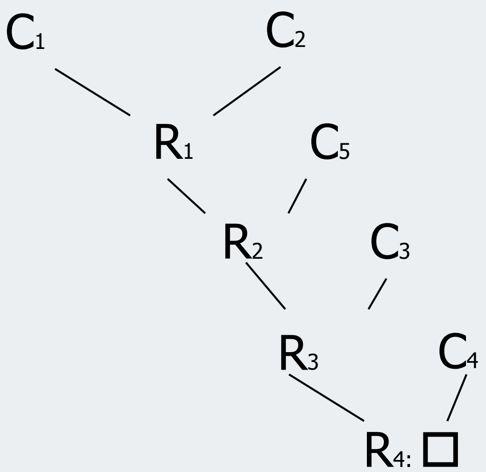
- **Resolución input**: Sólo genera derivaciones input

- Ejemplos:

  C_1: $\neg T(x) \vee L(x)$, C_2: $\neg D(x) \vee \neg L(x)$, C_3: $D(a)$, C_4: $I(a)$, C_5: $\neg I(x) \vee T(x)$

Refutación input (y lineal) partiendo de C_1:

R_1: $\neg T(x) \vee \neg D(x)$	(C_1, C_2)
R_2: $\neg I(x) \vee \neg D(x)$	(R_1, C_5)
R_3: $\neg I(a)$	(R_2, C_3)
R_4: $\square$	(R_3, C_4)



Refutación input (y lineal) partiendo de C_5:

R_1: $T(a)$	(C_5, C_4)
R_2: $L(a)$	(R_1, C_1)
R_3: $\neg D(a)$	(R_2, C_2)
R_4: $\square$	(R_3, C_3)

Resolución Input.

- Ejemplo: C_1: p v q, C_2: ¬p v q, C_3: r v ¬q, C_4: ¬r v ¬q

  Refutación *no lineal y no input*:

R_1: q v q	(C_1, C_2)
R_2: ¬q v ¬q	(C_3, C_4)
R_3: □	(R_1, R_2)

  Pero para toda derivación no lineal hay una lineal equivalente:

R_1: q v q	(C_1, C_2)
R_2: r	(R_1, C_3)
R_3: ¬q	(R_2, C_4)
R_4: □	(R_3, R_1)

  - ¿Hay también una resolución input para toda resolución no input?

- **La resolución input no es completa (en el caso general):** Para cualquier conjunto de cláusulas C que sea insatisfacible no es posible afirmar que exista una refutación input de C
  - El ejemplo anterior es la prueba en contrario: no es posible deducir □ por resolución input.

Resolución Dirigida.

- **Derivación dirigida:** Una derivación dirigida de C_m a partir de $\{C_1,...,C_n\}$, con conjunto soporte $S \subset C$, es una secuencia $C_1,...,C_n,C_{n+1},...,C_m$ tal que:
  - Para todo $i > n$, C_i es resolvente de dos cláusulas anteriores en la secuencia que no pertenecen ambas a S

- Las cláusulas de S son **cláusulas soporte** y las de C – S son **cláusulas objetivo**

- **Resolución dirigida:** Sólo genera derivaciones dirigidas

- Ejemplo: $C = \{C_1\text{: } s \vee t,\ C_2\text{: } \neg s \vee p,\ C_3\text{: } \neg q \vee r,\ C_4\text{: } q \vee \neg p,\ C_5\text{: } u \vee \neg r,\ C_6\text{: } \neg u,\ C_7\text{: } \neg t\}$, $S = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$

1.	s	(C_1, $\mathbf{C_7}$)	1.	t v p	(C_1, C_2)
2.	p	(R_1, C_2)	2.	p	(R_1, $\mathbf{C_7}$)
3.	q	(R_2, C_4)	3.	q	(R_2, C_4)
4.	r	(R_3, C_3)	4.	r	(R_3, C_3)
5.	u	(R_4, C_5)	5.	u	(R_4, C_5)
6.	□	(R_5, $\mathbf{C_6}$)	6.	□	(R_5, $\mathbf{C_6}$)
	refutación dirigida			*refutación no dirigida*	

Resolución Dirigida.

- **La resolución dirigida puede ser completa:** Si hay una derivación de ☐ a partir de C, y S (S ⊂ C) es satisfacible, hay una resolución dirigida de ☐ con conjunto soporte S.

- Esta estrategia no es de mucha utilidad si no es posible identificar un conjunto soporte satisfacible

- En la práctica, en la búsqueda de la refutación de una conclusión a partir de un conjunto de premisas, es una *heurística* razonable operar bajo el supuesto de la satisfacibilidad de las premisas:

  - Premisas de la demostración (en forma clausular): conjunto soporte **S**
  - Negación de la conclusión (en forma clausular): conjunto objetivo **C – S**
  - Si las premisas son inconsistentes, entonces cualquier conclusión se deriva: [A, ¬A] |— B
  - Pero si las premisas son consistentes, entonces ☐ debe derivarse de la negación de la conclusión: [A, B] |— B, es decir {A, B, ¬B} es insatisfacible.

Resolución Ordenada.

- Existen numerosas formas de tener en cuenta el orden de los literales en las clausulas para limitar las demostraciones tomadas en consideración dentro del árbol de las deducciones.

- En la resolución ordenada las cláusulas son sucesiones finitas de literales (con literales ordenados).

- Para poder llevar a cabo la resolución entre dos clausulas se tiene que poder aplicar la regla de resolución, pero además:

    - La resolución tiene que ser practicada con los literales que están en cabeza de las clausulas.

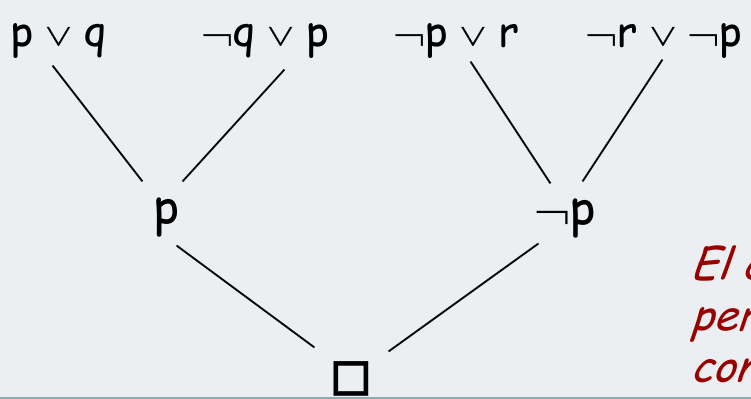
    - El resolvente tiene que estar ordenado.

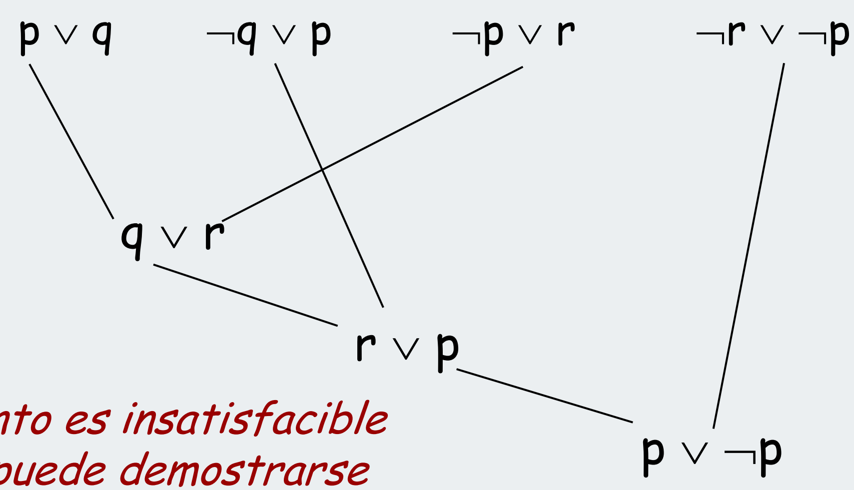
Resolución Ordenada.

- **Derivación ordenada:** Una derivación ordenada de C_m a partir de $\{C_1,\ldots,C_n\}$ es una secuencia $C_1,\ldots,C_n,C_{n+1},\ldots,C_m$ tal que:
  - cada C_i, $i>n$, es resolvente de dos cláusulas anteriores $A_1 \vee L_{11} \vee \ldots \vee L_{1p}$ y $\neg A_2 \vee L_{21} \vee \ldots \vee L_{2q}$ donde A_1 y A_2 son unificables con un umg σ,
  - Los literales de Ci están ordenados de esta forma: $(L_{11} \vee \ldots \vee L_{1p} \vee L_{21} \vee \ldots \vee L_{2q})\sigma$

- **La resolución ordenada no es completa**

$\{p \vee q, \neg q \vee p, \neg p \vee r, \neg r \vee \neg p\}$





El conjunto es insatisfacible pero no puede demostrarse con una refutación ordenada

Estrategias de Refinamiento. Propiedades.

- **Corrección:** □ se deduce sólo si el conjunto de cláusulas S es insatisfacible (□ → S insatisfacible)
- **Completitud:** Si el conjunto de cláusulas S es insatisfacible entonces □ se puede deducir (S insatisfacible → □)

	Correcta	Completa
Lineal	Si	Si
Input	Si	No, en el caso general
Dirigida	Si	Sí, si el conjunto soporte es satisfacible
Ordenada	Si	No